
Pratique Supplémentaire 11

Cette série fait suite aux chapitres 6.4 6.5 6.6 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay, aussi bien que certains concepts vus au cours.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Soient $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ et $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ deux bases orthonormales de \mathbb{R}^n . On définit les matrices de taille $n \times n$, $U = (\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n)$ et $V = (\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n)$. Montrer que $U^T U = I_n$, $V^T V = I_n$ et que UV est inversible.

Exercice 2

i) Soit $\{u_1, \dots, u_n\}$ une base orthonormée de \mathbb{R}^n et v un vecteur dans \mathbb{R}^n . Montrer

$$\|v\|^2 = |v \cdot u_1|^2 + \dots + |v \cdot u_n|^2.$$

ii) (Inégalité de Bessel) Soit $\{u_1, \dots, u_p\}$ une famille orthonormée dans \mathbb{R}^n et soit v un vecteur de \mathbb{R}^n . Montrer

$$\|v\|^2 \geq |v \cdot u_1|^2 + \dots + |v \cdot u_p|^2.$$

Copyright © Prof(s). de la section de mathématiques EPFL (Assyr Abdulle, ...). Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre: D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.